Définitions:

La Karimation désigne la démonstration plus que l'opérateur, puisque les K_n^p furent introduits par Maurice d'Ocagne en tant que conjectures(Bulletin de la societe Mathematique de France).Pour plus d'informations, Voir Section "Utilisation de la Karimation".

Soit le polynôme $x_{[k]} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$ avec k≥1, appelé k^{ieme} puissance descendante de x.
On définit aussi la $k^{ième}$ puissance montante ou factorielle de x en posant:
$x^{[k]} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)$.
Les puissances montantes et descendantes sont liées par l'identité:
$(-x)^{[k]} = (-1)^k x_{[k]}$.

1^er lemme:

Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}$, on pose: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. On a:
$\Delta x_{[k]} = k.x_{[k-1]}$.
En effet: $(x+1)_{[k]} - x_{[k]} = (x+1)x_{[k-1]} - (x-k+1)x_{[k-1]} = k.x_{[k-1]}$.
On a donc, pour k fixé: $\sum_{x=0}^{n+1}(x+1)^{[k]} = \sum_{x=0}^{n+1}\frac{\Delta x^{[k+1]}}{k+1}$. On en déduit par somme télescopique:
$1^{[k]} + 2^{[k]} + \ldots + n^{[k]} = \frac{n^{[k+1]}}{k+1}$.

Exemple:

Pour k=2: $1*2 + 2*3 + 3*4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2^ème lemme:

A partir de là, on arrive à exprimer les puissances ordinaires en fonction des puissances montantes. Exemples:
$x^1 = x^{[1]}$
$x^2 = x^{[2]} - x^{[1]}$
$x^3 = x^{[3]} - 3x^{[2]} + x^{[1]}$
$x^4 = x^{[4]} - 6x^{[3]} + 7x^{[2]} - x^{[1]}$

On obtient alors un triangle arithmétique. Il existe donc des coefficients uniques notés K_n^p tel que: $x^n=\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}.K_n^p.x^{[p]}$ et $(-x)^n=\sum_{p=0}^{n}K_n^p.x_{[p]}$

3ème lemme:

Soient B_n les nombres de Bernoulli: $B_n=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}.K_n^{i-1}.\frac{(i-1)!}{i}$

Demonstration:

$x^p=\sum_{i=1}^{p+1}K_p^{i-1}.x_{[i-1]}$ signifie:

$\sum_{x=0}^{n-1}x^p=\sum_{x=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{p+1}K_p^{i-1}.x_{[i-1]}\right)=\sum_{i=1}^{p+1}K_p^{i-1}.\sum_{x=0}^{n-1}x_{[i-1]}$

La relation $\Delta\, x_{[i]}=i*x_{[i-1]}$ entraine par somme telescopique:

$\sum_{x=0}^{n-1}x_{[i-1]}=\frac{n_{[i]}-0_{[i]}}{i}$,car i>0. Par suite $\sum_{x=0}^{n-1}x^p=\sum_{i=1}^{p+1}K_p^{i-1}.\frac{n_{[i]}}{i}$

Revenons maintenant aux polynômes de Bernoulli: Il a été déjà établi que:

$\frac{x.e^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}.x^n$ Calculons maintenant: $B_n\left(t+1\right)-B_n\left(t\right)$:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t+1)-B_n(t)}{n!}.x^n=\frac{x.e^{(t+1)x}}{e^x-1}-\frac{x.e^{tx}}{e^x-1}=x.e^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n.t^{n-1}}{n!}.x^n$

Par identification: $B_n\left(t+1\right)-B_n\left(t\right)=n.t^{n-1},\forall n\geq 0$ Donc:

$\sum_{k=0}^{n-1}k^p=\frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}\left(n\right)-B_{p+1}\left(0\right)\right)$

Une identité connue de ces polynômes est: $B_{p+1}^{'}=(p+1).B_p(x)$ Donc:

$\int_0^n B_{p+1}^{'}(x)dx=(p+1).\int_0^n B_p(x)dx\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}k^p=\frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}\left(n\right)-B_{p+1}\left(0\right)\right)=\int_0^n B_p(x)dx$

$\Rightarrow\int_0^n B_p(x)dx=\sum_{i=1}^{p+1}K_p^{i-1}.\frac{n_{[i]}}{i}$

En dérivant par rapport a x on obtient: $B_p(x) = \sum_{i=1}^{p+1} K_p^{i-1}.\frac{d}{dx}\frac{x_{[i]}}{i}$ Donc:

$$B_n(0) = \sum_{i=1}^{n+1} K_n^{i-1}.\frac{d}{dx}\frac{x_{[i]}}{i}\bigg|_{x=0}$$

Le polynôme $x_{[i]}$ s'annule en x=0, puisque i>0. La valeur de sa dérivée en x=0 est donnée parProxy-Connection: keep-alive Cache-Control: max-age=0

$$\frac{x_{[i]}}{i}\bigg|_{x=0} = (-1).(-2)...(-i+1) = (-1)^{(i-1)}.(i-1)!$$

Finalement:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}.K_n^{i-1}.\frac{(i-1)!}{i}$$

4$^{\text{ème}}$ lemme:

Soit l'opérateur de dérivation: $\frac{d}{dx}.x(f) = \frac{d}{dx}(xf)$ pour f de $C^\infty(\mathbb{R})$, alors $\forall n$:

$$\left(\frac{d}{dx}.x\right)^{(n)}(f) = \sum_{p=0}^{n} K_n^p.x^p.f^{(p)}$$

Exemples:

$$\left(\frac{d}{dx}.x\right)^{(2)}(f) = \left(\frac{d}{dx}.x\right)\left(\frac{d}{dx}.x\right)(f) = \left(\frac{d}{dx}.x\right)\left(xf'\right) = \ xf' + x^2f''$$

En continuant, on obtient:

$$\left(\frac{d}{dx}.x\right)^{(1)}(f) = xf^{(1)}$$

$$\left(\frac{d}{dx}.x\right)^{(2)}(f) = xf^{(1)} + x^2f^{(2)}$$

$$\left(\frac{d}{dx}.x\right)^{(3)}(f) = xf^{(1)} + 3x^2f^{(2)} + x^3f^{(3)}$$

$$\left(\frac{d}{dx}.x\right)^{(4)}(f) = xf^{(1)} + 7x^2f^{(2)} + 6x^3f^{(3)} + x^4f^{(4)}$$

On remarque que l'on obtient les mêmes coefficients du triangle arithmétique précédent, d'où:

$$\left(\frac{d}{dx}.x\right)^{(n)}(f) = \sum_{p=0}^{n} K_n^p.x^p.f^{(p)}$$

Utilisation de la Karimation:

Soient les coefficients Karimation K_n^p définis pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$:
$K_{n+1}^p = pK_n^p + K_n^{p-1}$ avec: $K_n^n = 1$ et $K_n^0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Alors: $$K_n^p = \frac{1}{p!}.\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-1}.C_p^i.i^n$$

En effet, si l'on applique le 4ème lemme de Ghariani à la fonction $f(x) = e^x$, on obtient:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{p^n.x^p}{p!} = e^x.\sum_{p=0}^{n}K_n^p.x^p$$

Donc, pour n fixé, on pose $a_p = p!.K_n^p$, pour tout $k \geq 0$. Avec cette notation l'égalité devient:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k x^k}{k!} = e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n x^k}{k!} \Rightarrow a_p = \sum_{i=0}^{p}C_p{}^i\,(-1)^{p-i}\,i^n \Rightarrow K_n^p = \frac{1}{p!}.\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-1}.C_p^i.i^n$$

L'opérateur Karimation, appelé aussi opérateur de Ghariani, a été justifié par le tunisien Karim Ghariani, d'apres la conjecture de Maurice d'Ocagne proposée en 1886, âgé alors de 19 ans lors de sa 1ère année a l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie (INSAT).
Le sens mathématique de la Karimation, expliqué par Karim Ghariani, absent dans l'article d'Ocagne, utilise des notions de probabilité élémentaires et fera l'objet d'un article annexe.

Corollaire:

$$\forall n, B_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{i+1}.\sum_{p=0}^{i}\left((-1)^p.C_i^p.p^n\right)\right)$$

Pour l'obtenir, il suffit d'injecter la formule explicite de la Karimation dans celle des nombres de Bernoulli (lemme3).
On signalera que cette formule existe déja, mais l'article innove par sa démonstration élégante et constructive. LANL confirme la déposition libre non lucrative (licence libre GNU) de la démonstration. Par ces termes, cet article ne peut être retenu comme sujet officiel de thèse. (Par l'administration légale ArXiv).

Applications

Les nombres de Bernoulli sont présents dans le développement limité de la fonction tangente et tangente hyperbolique en série de Taylor(c-à-d sous sa forme générale).

On pose: $B(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ (génératrice exponentielle). On a: $B(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$

Commençons par:

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 2\frac{e^{4x} + 1}{e^{4x} - 1} - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = (B(4x) + 2x) - (B(2x) + x) = B(4x) - B(2x) + x$$

Or, on sait que:

$$B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_n.\frac{x^n}{n!}$$

En remplaçant on obtient:

$$tanh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}.4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}$$

La tangente s'obtient en remplaçant x par ix dans la nouvelle expression de tanh(x), avec: $i^2=(-1)$. On obtient:

$$tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_{2n}|.4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}$$